

کاربرد روش‌های با دقت مرتبه‌ی بالا (NVD) در حل معادلات ضربه‌ی قوچ در سیستم‌های آبرسانی

میلاذ لطیفی^۱، محسن دوازده‌امامی^۲، محمدرضا چمنی^۳

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران-آب، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

۲- استادیار دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

۳- دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

milad.latifi@yahoo.com

خلاصه

بررسی، مطالعه و کنترل پدیده‌ی ضربه‌ی قوچ یکی از مهمترین دغدغه‌های مهندسين طراح خطوط انتقال آب است. با توجه به نوع معادلات حاکم بر جریان ناماندگار، از سالیان دور تاکنون روش‌های مختلفی برای حل عددی این مسئله ارائه شده است. در سال‌های اخیر، روش‌های مبتنی بر احجام محدود برای حل معادلات ضربه‌ی قوچ توسعه یافته است. روش‌های با دقت مرتبه بالا (مبتنی بر نمودار متغیر نرمال‌شده (NVD)) از جمله روش‌هایی هستند که در سالیان اخیر در حل بسیاری از مسائل مکانیک سیالات بکار رفته‌اند. در پژوهش حاضر این روش برای اولین بار در تحلیل جریان ناماندگار استفاده شده است. نتایج حاصل، نشان‌گر دقت بالای روش و همخوانی آن با مدل‌های عددی پیشین می‌باشد.

کلمات کلیدی: ضربه‌ی قوچ، جریان ناماندگار، روش احجام محدود، روش NVD

۱. مقدمه

مطالعه‌ی جریان ناماندگار و پدیده‌ی ضربه‌ی قوچ در مهندسی آب از اهمیت ویژه‌ای در طراحی و تخمین عملکرد سیستم برخوردار است. عوامل عمده‌ی ایجاد جریان ناماندگار عبارتند از: باز کردن و بستن شیرهای قطع و وصل، روشن و یا خاموش کردن پمپ‌ها، بهره‌برداری از شیرهای یک طرفه، خلأ، فشارشکن و غیره، ترکیدن لوله‌ها و غیره. بروز پدیده‌ی ضربه قوچ می‌تواند باعث ایجاد فشارهای اضافی، صدا، کاویتاسیون و لرزش در خطوط انتقال آب شود [۱]. اگرچه این پدیده در شبکه‌های توزیع آب چندان نگران‌کننده نیست، اما بروز آن در خطوط آبرسانی می‌تواند موجب ایجاد خسارت‌های وسیع در خط انتقال و تجهیزات مرتبط با آن شود. میزان این خسارت‌ها بستگی به عوامل متعدد از جمله خصوصیات فیزیکی سیستم و تجهیزات به کار رفته در آن دارد. از این روست که امروزه بررسی پدیده‌ی ضربه قوچ و درنظر گرفتن تمهیدات ویژه برای مهار آن از ضروریات طراحی یک خط انتقال آب است.

مهندسان از سال‌های دور با این پدیده آشنایی داشته‌اند. شاهد این امر تحقیقاتی است که بیش از ۱۵۰ سال پیش بر روی پدیده‌ی ضربه‌ی قوچ انجام گرفته است. به‌طور کلی برای تحلیل هیدرولیکی پدیده‌ی ضربه قوچ دو روش عمده ارائه شده است [۱]. در روش اول که به نام روش نظریه‌ی غیرالاستیک شناخته می‌شود، سیال یک ماده‌ی تراکم‌ناپذیر و جداره‌ی لوله نیز غیرقابل انعطاف در نظر گرفته می‌شود. معادله‌ی بیان‌کننده‌ی این حالت از معادله‌ی اندازه حرکت بدست می‌آید و از نوع دیفرانسیل ساده بوده و به راحتی قابل حل است. در روش دوم موسوم به روش الاستیک، خواص الاستیکی سیال و لوله درنظر گرفته می‌شوند. معادلات بیان‌کننده‌ی این روش عبارتند از: معادله‌ی پیوستگی و معادله‌ی اندازه حرکت، که با درنظر گرفتن اثرات ناماندگاری نوشته می‌شوند. این دو معادله از نوع دیفرانسیلی جزئی بوده و تاکنون حل تحلیلی برای آن‌ها ارائه نشده است. به همین دلیل حل معادلات حاکم بر ضربه‌ی قوچ به روش الاستیک نیازمند به کارگیری روش‌های عددی است.

۲. معادلات حاکم بر پدیده‌ی ضربه قوچ و روش‌های فعلی حل آن

بر اساس روش نظریه‌ی الاستیک، برای تحلیل پدیده‌ی ضربه قوچ در لوله‌ها، روابط کامل پیوستگی^۱ و اندازه‌ی حرکت^۲ به قرار زیر است:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) - V \sin \alpha = 0 \quad (۱)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \left(\frac{f}{2D} \right) V |V| = 0 \quad (۲)$$

که در آن V و H سرعت و هد فشار جریان، a سرعت انتشار موج، g شتاب ثقل، α زاویه‌ی خط لوله با افق، f ضریب اصطکاک داری-وایسباخ، D قطر لوله و x و t مؤلفه‌های مکانی و زمانی پارامترهای سرعت و فشار هستند. در روابط بالا اگر جمله‌های جابه‌جایی^۳ (جمله‌های دوم) حذف شوند، روابط تقریبی ضربه‌ی قوچ و نیز اگر روابط تقریبی ترم‌های اصطکاک و شیب خط لوله حذف شوند، روابط کلاسیک ضربه‌ی قوچ به‌دست خواهند آمد [۲].

برای حل معادلات (۱) و (۲) روش‌های متعددی ارائه شده است. در روش مشخصه‌ها^۴ (MOC) با انجام ترکیب خطی، معادلات دیفرانسیل جزئی پیوستگی و اندازه‌ی حرکت به دو معادله‌ی دیفرانسیلی کلی^۵ تبدیل می‌شوند. سپس این معادلات به صورت اختلاف متناهی^۶ نوشته شده و توسط رایانه حل می‌شود [۱]. این روش به دلیل پایداری بالا، پیش‌بینی شرایط مرزی مختلف، در نظر گرفتن اثر افت هد فرعی، قابلیت حل سیستم‌های پیچیده، داشتن بیشترین دقت در بین روش‌های اختلاف متناهی دارای بیشترین کاربرد در حل مسائل ضربه‌ی قوچ است، به‌طوری که در اغلب نرم‌افزارهای تحلیل ضربه‌ی قوچ به‌کار گرفته شده است [۳].

توسعه‌ی روش‌های حل عددی همچون اختلاف متناهی، المان‌های محدود^۷ و احجام محدود^۸ سبب شده است تا محققان بسیاری به حل پدیده‌ی ضربه‌ی قوچ با استفاده از این روش‌ها روی آورند [۲]. در روش اختلاف متناهی با گسسته‌سازی و تبدیل مستقیم معادلات دیفرانسیل به معادله‌ی گسسته‌ی تفاضلی، معادلات به مجموعه‌ای از معادلات جبری قابل حل تبدیل می‌شوند. در روش المان‌های محدود این کار با انتگرال گیری روی المان‌ها و استفاده از توابع شکل خطی، درجه دوم و یا مرتبه بالاتر انجام می‌شود. در روش احجام محدود نیز با انتگرال گیری روی وجوه و به کارگیری تابع شکل خطی معادلات گسسته‌سازی می‌شوند.

به کارگیری روش‌های مبتنی بر احجام محدود در حل مسئله‌ی ضربه‌ی قوچ سابقه‌ی چندانی ندارد. نخستین بار گینو^۹ (۲۰۰۰) در پژوهشی حل‌گرهای ریمان^{۱۰} را برای حل مسئله‌ی ضربه‌ی قوچ به‌کار گرفت. مدلی که وی ایجاد کرد، اگرچه بسیار سریع بود، اما در چگالی‌های پایین و سرعت‌های کم دقت اندکی داشت و جواب‌های غیردقیق ارائه می‌کرد [۴]. گینو (۲۰۰۲) همچنین در پژوهش دیگری به تکمیل یافته‌های پیشین خود پرداخت [۵]. هوانگ و چونگ (۲۰۰۲) به معرفی روش حل مسئله‌ی ضربه‌ی قوچ با استفاده از روش گادانوف^{۱۱} سریع مرتبه دوم پرداختند [۶]. نتایج ایشان اگرچه در برخی موارد تطابق خوبی با نتایج تحلیل داشت (به‌خصوص در نزدیکی جبهه‌ی موج که گرادیان زیادی وجود دارد)، اما در اغلب موارد دارای جابه‌جایی ($Shift$) زمانی بود. لازم به‌ذکر است که ایشان در حل خود از اثر اصطکاک صرف‌نظر کرده بودند. ژانو و گیدویی (۲۰۰۴) هم به حل معادلات ضربه‌ی قوچ با استفاده از روش‌های مرتبه اول و دوم گادانوف پرداختند [۷]. آن‌ها با مقایسه‌ی روش‌های خود با روش مشخصه‌ها با درون‌یابی روی خط مکانی دریافتند جواب‌های روش گادانوف مرتبه اول همانند جواب‌های روش مشخصه‌های با درون‌یابی مکانی است. از سوی دیگر آن‌ها روش گادانوف مرتبه دوم را بسیار سریع، دقیق و با پایداری بالا یافتند. آن‌چه در نتایج کار ژانو و گیدویی جالب توجه است این است که در مقایسه‌ی بین نتایج با داده‌های کورانت مختلف، لازم است حل با عدد کورانتی در حدود ۱/۰ انجام گیرد تا هد فشاری حداکثر با نتایج حل دقیق برابری کند و حل ایشان در اعداد کورانت کمتر، دقیق نیست. ضمن این که آن‌ها نتایج مطالعه‌ی موردی خود را در شرایطی که اصطکاک وجود داشته باشد، در مقاله ذکر نکرده‌اند. همچنین، محققین دیگری روش گادانوف را برای تحلیل جریان ناماندگار در فاضلاب [۸]، جریان دو فاز [۹] و جریان کم عمق با سطح آزاد [۱۰] به کار برده‌اند.

¹ Continuity Equation

² Momentum Equation

³ Convection Terms

⁴ Method of Characteristics

⁵ Total Differential Equation

⁶ Finite Difference

⁷ Finite Elements

⁸ Finite Volumes

⁹ Guinot

¹⁰ Riemann Solvers

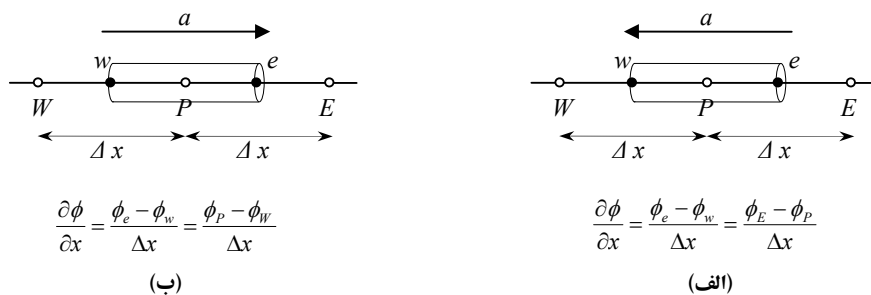
¹¹ Godunov

از به کارگیری روش های مبتنی بر NVD هم زمان زیادی نمی گذرد. درویش و مقلد (۱۹۹۷) فرمول بندی NVD برای روش های با دقت بالا به کار گرفتند [۱۱]. آن ها برای انجام حل خود از محدود کننده هایی^۱ چون $MINMOD$ و $MUSCL$ و $OSHER$ و غیره استفاده کردند و بهترین نتایج را با محدود کننده های $SMART$ و $STOIC$ کسب کردند. نتایج به دست آمده از مدل درویش و مقلد نشان می دهد بهترین محدود کننده های به کار گرفته شده توسط ایشان، حداکثر مقدار پارامتر را با ۲۰ درصد خطا پیش بینی می کند و این خطا در سایر موارد تا ۴۰ درصد نیز می رسد. درویش و مقلد (۲۰۰۳) در پژوهشی با معرفی روش جدیدی موسوم به χ به فرمول بندی جدیدی بر مبنای روش های قبلی دست یافتند [۱۲]. حل چند مسأله نمونه با استفاده از این روش پایداری بیشتری رانست به روش های پیشین نشان می دهد.

۳. روش حل ارائه شده

مطابق آنچه در مقالات پیشین دیده شد، روش های مختلف احجام محدود برای حل مسئله ی ضربه ی قوچ به کار گرفته شدند. روش NVD تاکنون تنها در جریان سیال تراکم پذیر (گازها) و تراکم ناپذیر استفاده شده است و هیچ یک از محققین از این روش در حل مسائل هیدرولیک (از جمله ضربه ی قوچ) استفاده نکرده است. در این بخش گسسته سازی معادلات حاکم به روش $Upwind$ انجام می شود و سپس روش اعمال دقت های مرتبه ی بالاتر به روش NVD بیان می گردد.

برای گسسته سازی جملات مشتق مکانی به روش $Upwind$ بر مبنای جهت حرکت موج عمل می شود. شکل (۱) این روش گسسته سازی را نشان می دهد.



شکل ۱: گسسته سازی به روش $Upwind$ ؛ (الف) موج پایین دست، (ب) موج بالادست

برای گسسته سازی جملات مشتق زمانی از روش یک گامی θ استفاده می شود:

$$\phi = \theta \phi^n + (1 - \theta) \phi^{n-1} \quad (۳)$$

همچنین گسسته سازی به خاطر جامعیت به صورتی انجام شده که برای دقت مرتبه ی دوم به بالا قابل اجرا باشد، ولی برای پایداری حل عددی مطابق روش $Deferred Correction$ جملات مرتبه ی دوم را جدا کرده و اختلاف آن در جمله چشمه قرار گرفته است [۱۳].

• گسسته سازی معادله ی پیوستگی

معادله (۱) با صرف نظر از جمله جابجایی و فرض لوله افقی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \quad (۴)$$

این معادله پس از گسسته سازی به معادله ی جبری زیر تبدیل می شود:

¹ Limiter

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_p}{\Delta t} H_p^n + \frac{a^2}{g} \theta \left[(V_e^n)_{up} - (V_w^n)_{up} \right] = \\ \frac{\Delta x_p}{\Delta t} H_p^{n-1} - \frac{a^2}{g} \theta (V_e^{n-1} - V_w^{n-1}) + \frac{a^2}{g} \theta \gamma \left[(V_e^* - V_w^*)_{up} - (V_e^* - V_w^*)_{HOS} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن Δx طول المان، Δt فاصله‌ی بین دو گام زمانی، n و $n-1$ به ترتیب گام فعلی و گام پیشین حل، اندیس up نشان‌دهنده‌ی جملات $supwind$ اندیس HOS نشان‌دهنده‌ی جملات با دقت مرتبه‌ی بالاتر هستند. همچنین، γ ضریب اختلاط بوده و نسبت به کارگیری روش با دقت مرتبه‌ی بالا را نمایش می‌دهد.

معادله جبری (۴) به فرم فشرده چنین نوشته می‌شود:

$$A_p^H H_p + (A_p^V V_p + A_E^V V_E + A_W^V V_W) = S_u \quad (6)$$

که در آن:

$$A_p^H = \frac{\Delta x_p}{\Delta t} \quad (7)$$

در صورتی که $a > 0$:

$$A_W^V = -\frac{a^2}{g} \theta \quad A_E^V = 0 \quad A_p^V = A_W^V + A_E^V \quad (8)$$

در صورتی که $a < 0$:

$$A_W^V = 0 \quad A_E^V = \frac{a^2}{g} \theta \quad A_p^V = A_W^V + A_E^V \quad (9)$$

$$S_u = \frac{\Delta x_p}{\Delta t} H_p^{n-1} - \frac{a^2}{g} (1-\theta) (V_e^{n-1} - V_w^{n-1}) + \frac{a^2}{g} \theta \gamma \left[(V_e^* - V_w^*)_{up} - (V_e^* - V_w^*)_{HOS} \right] \quad (10)$$

• گسسته‌سازی معادله‌ی اندازه حرکت

معادله‌ی (۲) با صرف نظر از جمله جابجایی چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f}{2D} V |V| = 0 \quad (11)$$

این معادله نیز پس از گسسته‌سازی به معادله‌ی جبری زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_p}{\Delta t} V_p^n + g \theta \left[(H_e^n)_{up} - (H_w^n)_{up} \right] + \frac{f}{2D} \theta V_p^n |V_p^*| \Delta x_p \\ = \frac{\Delta x_p}{\Delta t} V_p^{n-1} + g \theta \gamma \left[(H_e^* - H_w^*)_{up} - (H_e^* - H_w^*)_{HOS} \right] - g (1-\theta) (H_e^{n-1} - H_w^{n-1}) - \frac{f}{2D} (1-\theta) V_p^{n-1} |V_p^*| \Delta x_p \end{aligned} \quad (12)$$

معادله‌ی جبری (۱۱) به فرم فشرده به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$B_p^V V_p + (B_p^H H_p + B_E^H H_E + B_W^H H_W) = S_u \quad (13)$$

که در آن:

$$B_p^V = \frac{\Delta x_p}{\Delta t} + \frac{f}{2D} \theta |V_p^*| \Delta x_p \quad (14)$$

در صورتی که $a > 0$:

$$B_W^H = -g \theta \quad B_E^H = 0 \quad B_p^H = B_W^H + B_E^H \quad (15)$$

در صورتی که $a < 0$:

$$B_W^H = 0 \quad B_E^H = g \theta \quad B_p^H = B_W^H + B_E^H \quad (16)$$

$$S_u = \frac{\Delta x_p}{\Delta t} V_p^{n-1} + g \gamma \theta \left[(H_e^* - H_w^*)_{up} - (H_e^* - H_w^*)_{HOS} \right] - g (1-\theta) (H_e^{n-1} - H_w^{n-1}) - \frac{f}{2D} (1-\theta) V_p^{n-1} |V_p^*| \Delta x_p \quad (17)$$

برای حل معادلات می توان در هر گام زمانی، با استفاده از آخرین مقادیر V موجود، معادله ی پیوستگی را حل کرد و مقدار H را در هر گره به دست آورد. سپس، با استفاده از این مقادیر H معادله ی اندازه حرکت را حل کرد و مقادیر V را به دست آورد. می توان این فرآیند را تا رسیدن به همگرایی در آن گام زمانی تکرار کرد. شرط همگرایی به صورت زیر تعریف می شود:

در ابتدای هر گام زمانی مقدار باقی مانده معادلات (۶) و (۱۳) محاسبه می شود و به عنوان Res_{0C} و Res_{0M} ذخیره می شود. در هر تکرار مقدار باقی مانده به همین روش محاسبه می شود و به عنوان Res_C و Res_M شناخته می شود. در انتهای هر تکرار با کنترل شرط همگرایی ادامه ی تکرارها یا پایان آن بررسی می شود. شرط همگرایی عبارت است از:

$$\frac{Res_C}{Res_{0C}} < 10^{-6} \quad \text{و} \quad \frac{Res_M}{Res_{0M}} < 10^{-6} \quad (18)$$

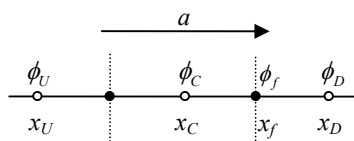
برای اضافه کردن جمله با دقت بالاتر (HOS) می توان از محدودکننده های مختلفی از جمله $OSHER$, $MUSCL$, $MINMOD$ و ... استفاده کرد. محدودکننده ی $MINMOD$ که به نام $SOUCUP$ نیز خوانده می شود، با رابطه ی زیر تعریف می شود:

$$\phi_{mg}(u, \theta) = \min \left(\theta \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}, \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}, \theta \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right) \quad (19)$$

$$\min \text{mod}(z_1, z_2, \dots) := \begin{cases} \min_j & \text{if } z_j > 0 \quad \forall j \\ \max_j & \text{if } z_j < 0 \quad \forall j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

برای تعریف شرط همگرایی و پایداری محدودکننده می توان از نمودار NVD ^۱ استفاده کرد. برای این امر لازم است متغیرهای نرمال^۲ تعریف شوند. مطابق شکل (۲) اگر نقاط بالادست، مرکزی، پایین دست و بین گرهی با حروف U, D, C ، f شناخته شوند، فاصله ی هر کدام با مبدأ مختصات به ترتیب به صورت x_U, x_C, x_D, x_f و مقادیر پارامتر مورد نظر (ϕ) در هر یک از نقاط به ترتیب با $\phi_U, \phi_C, \phi_D, \phi_f$ شناخته می شوند. بدین ترتیب مقادیر متغیرهای نرمال شده به ترتیب زیر تعریف می شود:

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U} \quad \tilde{x} = \frac{x - x_U}{x_D - x_U} \quad (20)$$



شکل ۲: نقاط مورد استفاده در درون یابی ϕ_f

استفاده از پارامترهای نرمال شده بالا، ارائه روش های ساده یا پیچیده با دقت مرتبه بالا به صورت یک تابع را آسان می کند و ارائه ی شرط لازم برای پایداری و کران داری حل را میسر می سازد. به علاوه، رابطه تابعی نرمال شده هر روش می تواند در یک نمودار متغیر نرمال (NVD) نمایش داده شود. چنین نموداری ابزاری مفید برای ارزیابی دقت، کران داری^۳ و پراکندگی نسبی روش های مختلف است. به طور کلی مقدار ϕ_f به وسیله ی رابطه ی پارامتری زیر نمایش داده می شود:

$$\phi_f = f(\phi_U, \phi_C, \phi_D, x_f, x_C, x_D, x_U) \quad (21)$$

که با انجام نرمال سازی به صورت زیر ساده می شود:

$$\tilde{\phi}_f = f(\tilde{\phi}_C, \tilde{x}_C, \tilde{x}_f) \quad (22)$$

¹ Normalized Variable Diagram

² Normalized Variables

³ Boundedness

با مقایسه‌ی روابط (۲۱) و (۲۲) به‌سادگی می‌توان دریافت که یکی از فواید به‌کارگیری روش نرمال‌سازی کاهش تعداد پارامترهای موجود در رابطه‌ی تابعی است. این امر به خاطر مقادیر نرمال‌شده‌ی $\tilde{x}_D, \tilde{x}_U, \tilde{\phi}_D, \tilde{\phi}_U$ است که به ترتیب با ۰، ۱ و ۱ برابرند. از طرف دیگر اگر شبکه‌بندی منظم باشد، مقادیر $\tilde{x}_C, \tilde{x}_f$ نیز به ترتیب با ۰/۵ و ۰/۷۵ برابر خواهند بود.

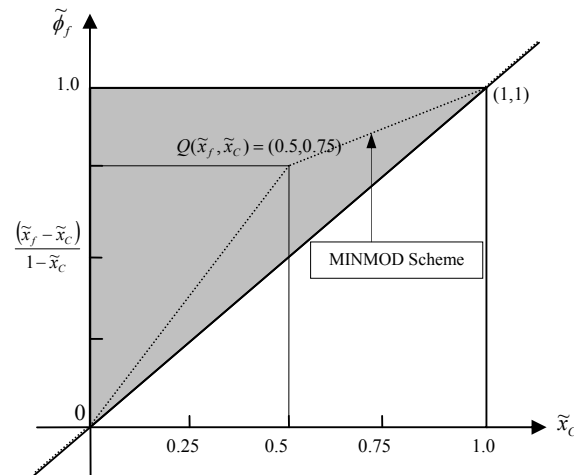
شرط کران‌داری مطابق مرجع [۱۴] اعمال می‌شود. بدین ترتیب که هر روش برای این که حائز کران‌داری باشد، باید در فاصله‌ی $0 < \tilde{\phi}_C < 1$ دارای رابطه‌ی تابعی پیوسته و کران‌دار از پایین به $\tilde{\phi}_f = \tilde{\phi}_C$ و از بالا به ۱ باشد. همچنین، باید از نقطه‌ی (۰، ۰) و (۱، ۱) عبور کرده و در ناحیه‌ی $0 < \tilde{\phi}_C$ یا $\tilde{\phi}_C > 1$ رابطه‌ی تابعی آن با $\tilde{\phi}_C$ برابر باشد. چنین شرایطی را به بیان ریاضی می‌توان این گونه نوشت:

$$\begin{cases} f(\tilde{\phi}_C) & \text{پیوسته باشد} \\ f(\tilde{\phi}_C) = 0 & \tilde{\phi}_C = 0 \\ f(\tilde{\phi}_C) = 1 & \tilde{\phi}_C = 1 \\ f(\tilde{\phi}_C) < 1 & 0 < \tilde{\phi}_C < 1 \\ f(\tilde{\phi}_C) = \tilde{\phi}_C & \tilde{\phi}_C < 0, \tilde{\phi}_C > 1 \end{cases} \quad (23)$$

شرایط بالا را می‌توان مطابق شکل (۳) در یک نمودار متغیرهای نرمال شده (NVD) نمایش داد. بدین ترتیب می‌توان روش‌های مختلف از جمله $MINMOD$ را به صورت نرمال‌شده نوشت. در این صورت رابطه‌ی تابعی این روش به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_f &= \frac{\tilde{x}_f}{\tilde{x}_C} \tilde{\phi}_C & 0 < \tilde{\phi}_C < \tilde{x}_C \\ \tilde{\phi}_f &= \frac{\tilde{x}_C - \tilde{x}_f}{\tilde{x}_C - 1} + \frac{\tilde{x}_f - 1}{\tilde{x}_C - 1} \tilde{\phi}_C & \tilde{x}_C < \tilde{\phi}_C < 1 \\ \tilde{\phi}_f &= \tilde{\phi}_C & \text{سایر نقاط} \end{aligned} \quad (24)$$

در شکل (۳) می‌توان رابطه‌ی تابعی بالا را مشاهده کرد.



شکل ۳: نمودار متغیرهای نرمال‌شده و نمایش روش $MINMOD$

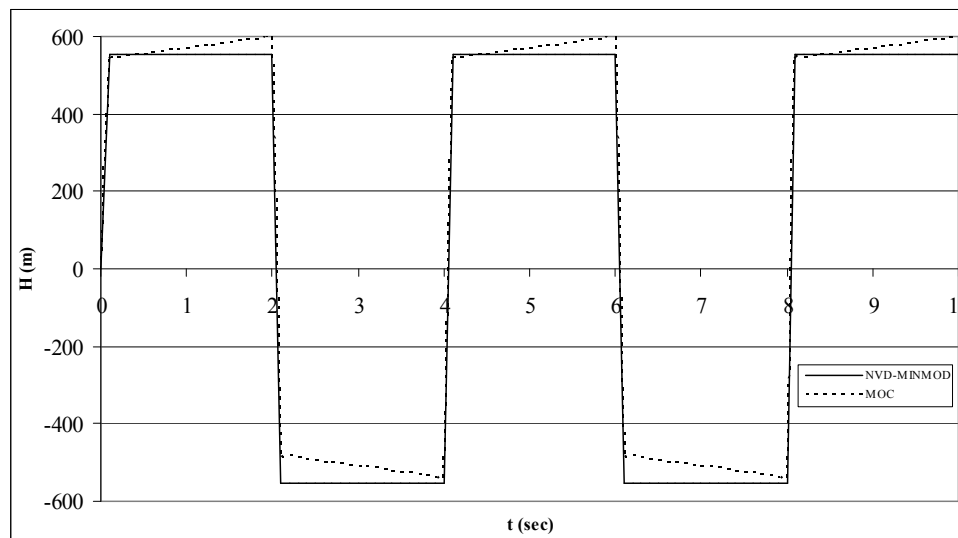
از سوی دیگر شرط اینکه روش، حداقل از مرتبه دوم باشد این است که در نمودار متغیرهای نرمال‌شده از نقطه $Q(\tilde{x}_f, \tilde{x}_C) = (0.5, 0.75)$ عبور نماید. همچنین، شرط اینکه روش حداقل از مرتبه سوم باشد این است که شیب آن در این نقطه با $M = \frac{\tilde{x}_f(\tilde{x}_f - 1)}{\tilde{x}_C(\tilde{x}_C - 1)}$ باشد. همان‌گونه که در شکل (۳) دیده می‌شود، شرط کران‌داری و مرتبه‌ی دوم بودن برای روش $MINMOD$ برقرار است. در این پژوهش، از روش $MINMOD$ برای افزودن دقت مرتبه دوم به حل استفاده شده است.

۴. تحلیل نتایج

در این بخش به ارزیابی و مقایسه نتایج مدل حاضر و نتایج حاصل از مدل‌های پیشین پرداخته خواهد شد. نرم‌افزار مورد استفاده در محیط MATLAB و بر اساس گسسته‌سازی ارائه شده در بخش قبل، تدوین شده است که در آن جملات زمانی به روش یک گامی θ و جملات مکانی بر اساس روش MINMOD و جملات چشمه/چاه بر اساس دقت مرتبه دوم گسسته‌سازی شده‌اند.

مثال بررسی شده مخزنی با ارتفاع اولیه ۳۰ متر، لوله‌ای افقی و بدون اصطکاک به قطر ۰/۵ متر و به طول ۱۰۰۰ متر، و شیر در پایین دست لوله در نظر گرفته شده است. سرعت موج $a = 1000 \text{ m}$ فرض شده است. سرعت اولیه جریان نیز با استفاده از حل مسئله در حالت پایدار، ۵/۴۲ متر بر ثانیه بدست آمده است. شرایط مرزی در دو طرف بر اساس روش مشخصه‌ها اعمال شده است.

مدل در حالتی که شیر به‌طور ناگهانی بسته شود اجرا شده است. نتایج اجرای مدل بر پایه روش ارائه شده در این پژوهش و همچنین مدل ساخته شده بر پایه روش مشخصه‌ها در شکل (۴) مقایسه شده‌اند. در این شکل، مقدار هد فشاری در گره‌ی شیر نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که در هر دو روش $\Delta x = 100 \text{ m}$ و $\Delta t = 0.1 \text{ sec}$ در نظر گرفته شده است که بدین ترتیب عدد کورانت برابر با $Cr = 1.0$ خواهد شد.



شکل ۴: مقایسه نتایج هد فشار در محل شیر از مدل فعلی و روش مشخصه‌ها در شرایط $Cr = 1.0$

همان‌گونه که در شکل (۴) دیده می‌شود، روش حاضر در پیش‌بینی هد فشار حداکثر کاراتر عمل می‌کند. همچنین، با وجود تقسیم‌بندی نسبتاً بزرگ بر روی شبکه حل، نتایج از همگرایی و پایداری خوبی برخوردار است.

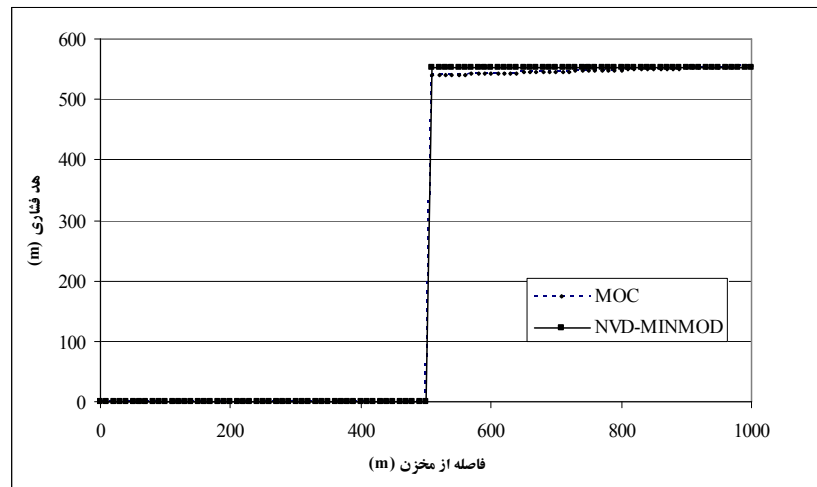
در مدل دوم برای بررسی کارایی مدل در برخورد با گرادیان‌های بالا، از شبکه‌بندی با ابعاد کوچکتر و $\Delta x = 10 \text{ m}$ استفاده شد. همچنین، برای برقراری شرط کورانت و تضمین پایداری حل، گام‌های زمانی نیز به همین نسبت کوچک‌تر انتخاب شدند. با اجرای مدل نتایج حاصل از مدل حاضر با روش مشخصه‌ها مقایسه گردید.

شکل (۵) میزان هد فشاری در نقاط مختلف لوله را در زمان $t = 0.5 \text{ sec}$ نمایش می‌دهد. همان‌گونه که از شکل برمی‌آید، مدل تهیه شده در مواجهه با گرادیان‌های بالا آن‌ها را بخوبی مدل‌سازی می‌نماید و هیچ‌گونه overshoot یا undershoot در نتایج حل دیده نمی‌شود.

۵. نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج بدست آمده از اجرای مدل در شرایط مختلف معلوم شد که با افزایش تعداد تقسیمات لوله، دقت در حل مسئله افزایش می‌یابد. همچنین، مشخص گردید که برای حفظ پایداری در حل مسئله، بهتر است عدد کورانت هرچه به ۱/۰ نزدیک‌تر انتخاب گردد. از سوی دیگر، این روش به لحاظ

زمان حل بسیار کندتر از سایر روش‌های معمول است. اما با این وجود به‌نظر می‌رسد در صورت وجود برخی شرایط مرزی پیچیده، بخاطر دقت بالاتر استفاده از این روش به‌صرفه باشد.



شکل ۵: مقایسه میزان هد فشاری در طول لوله در زمان $t = 0.5 \text{ sec}$

مراجع

- [۱] تائی، ا.، چمنی، م. ر.، «شبکه‌های توزیع آب شهری»، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۸۲.
- [۲] رستمی، ع.، چمنی، م. ر.، اصغری، ک.، «کاربرد درون یابی اسپلاین درجه سه در روش مشخصه‌ها برای حل ضربه قوچ»، ششمین کنفرانس بین‌المللی مهندسی عمران، ۱۵-۱۷ اردیبهشت ۱۳۸۲، دانشگاه صنعتی اصفهان.
- [3] Ghidaoui, M. S., Zhao, M., McInnis, D. A., Axworthy, D. H., (2004), "A Review of Water Hammer Theory and Practice", *American Society of Mechanical Engineering (ASME)*, 58(1), 49-76.
- [4] Guinot, V., (2000), "Riemann Solvers for Water Hammer Simulations by Godunov Method", *Intl. J. Numer. Meth. Eng.*, 49(7), 851-870.
- [5] Guinot, V. (2002), "An Unconditionally Stable Explicit Godunov Scheme for Systems of Conservation Laws", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 38, 567-588.
- [6] Hwang, W. H., and Chung, N. M., (2002), "A Fast Godunov Method for the Water-Hammer Problem", *Intl. J. Numer. Meth. Fluids*, 40(6), 799-819.
- [7] Zhao, M., and Ghidaoui, M., (2004), "Godunov-Type Solutions for Water Hammer Flows", *J. Hydra. Eng.*, ASCE, 130(4), 341-348.
- [8] Leon, A. S., Ghidaoui, M. S., Schmidt, A. R., and García, M. H. (2006), "Godunov-Type Solution for Transient Flows in Sewers", *J. Hydra. Eng.*, ASCE, 132(8), 800-813.
- [9] León, A. S., Ghidaoui, M. S., Schmidt, A. R., and García, M. H. (2007), "Godunov-Type Solutions for Two-Phase Water Hammer Flows" *Fifth International Symposium on Environmental Hydraulics*, Tempe, Arizona, USA. Dec. 4-7.
- [10] Toro, E. F., and Garcia-Navarro, P. (2007), "Godunov-Type Methods for Free-Surface Shallow Flows: A Review", *J. Hydra. Res.*, 45(6), 736-751.
- [11] Darwish, M. S., Moukalled, F. H. (2003), "Normalized Variable and Space Formulation Methodology for High-Resolution Schemes", *Numer. Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 26(1), 79-96.
- [12] Darwish, M. S., Moukalled, F. H. (2003), "The χ -Schemes: A New Consistent High-Resolution Formulation Based on the Normalized Variable Methodology", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(13-14), 1711-1730.
- [13] Gustafsson B., Hemmingsson-Frändén, L., (2002), "Deferred Correction in Space and Time", *J. Scientific Computing*, 17(10), 541-550.
- [14] Gaskell P. H., and Lau A. K. C. (1988), "Curvature Compensated Convective Transport: SMART, A New Boundedness Preserving Transport Algorithm", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 8, 617-641.