

تحلیل پدیده ضربه قوچ یک بعدی به روش اجزاء محدود با شرایط مرزی پیچیده

محمدرضا چمنی، استادیار دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

آزاده احمدی، دانشجوی دکتری، دانشگاه تهران

تلفن: ۰۳۱۱-۳۹۱۳۸۳۱، پست الکترونیکی: mchamani@cc.iut.ac.ir

چکیده

در این مقاله به بررسی و ارزیابی روش اجزاء محدود در تحلیل پدیده ضربه قوچ با شرایط مرزی پیچیده می‌پردازد که از دو روش گالرکین استاندارد و پتروف گالرکین، برای مدل کردن این پدیده استفاده شده است. شرایط مرزی مخزن در بالادست و پایین دست خط لوله، پمپ با سرعت ثابت در بالادست خط لوله، بستن شیر در پایین دست خط لوله، وجود شیر قبل از مخزن پایین دست، از کار افتادن پمپ واقع در بالادست خط لوله، وجود تانک هوا، مخزن ضربه گیر در خطوط لوله و شرط مرزی لوله‌های سری مدل سازی شده و نتایج آن ارائه شده است. این نتایج با نتایج حاصل از روش مشخصه‌ها مقایسه شده و نشان می‌دهد نتایج به دست آمده از روش پتروف گالرکین مطابقت بیشتری با نتایج حاصل از روش مشخصه‌ها دارد. برای به دست آوردن حداکثر و حداقل فشارهای ایجاد شده در خطوط لوله با شرایط مرزی وجود پمپ با سرعت ثابت و بستن شیر، از کار افتادن پمپ با یا بدون وجود مخزن هوا و مخازن ضربه گیر، محاسبه حجم هوا برای طراحی مخزن هوا و طراحی مخازن ضربه گیر در لوله‌های سری می‌توان از جواب‌های به دست آمده از روش پتروف گالرکین با دقت بسیار بالایی استفاده کرد. در همه موارد، جواب‌های به دست آمده با نتایج حاصل از روش مشخصه‌ها مطابقت دارد، اما زمان اجرای برنامه‌ها به روش اجزاء محدود در مقایسه با روش مشخصه‌ها بیشتر می‌باشد.

کلید واژه‌ها: ضربه قوچ، اجزاء محدود، شرایط مرزی پیچیده، وسایل کنترل کننده خیزاب

۱- مقدمه

هرگاه مشخصات جریان نظیر سرعت، دبی، فشار و... نسبت به زمان تغییر نماید، جریان ناماندگار ایجاد می‌شود. با کاهش یا افزایش دبی که همراه با کاهش یا افزایش سرعت می‌باشد، اندازه حرکت سیستم تغییر می‌کند. این تغییرات به تغییرات فشار تبدیل می‌شود و به صورت موج فشاری در سیستم انتقال می‌یابد و نام ضربه قوچ را به خود می‌گیرد. این موج با سرعت ثابت در خطوط جریان، به طرف بالادست و پایین دست حرکت می‌کند تا در مسیر حرکت خود به تدریج مستهلک شود و پس از مدتی به

حالت پایدار و دائمی برسد. معمولاً تغییراتی که در جریان ماندگار در یک خط لوله پیش می‌آید به علت تغییرات در شرایط مرزی لوله است. از جمله مهمترین این عوامل، باز و بستن سریع شیرها، وجود شیرهای یکطرفه، آغاز به کار پمپ‌ها، از کار افتادن پمپ‌ها، ترکیدن لوله‌ها، هوای حبس شده در خطوط لوله و نوسانات برق در توربین‌های آبی می‌باشد. مشکلات ناشی از ضربه قوچ شامل ایجاد فشارهای کم و زیاد، ارتعاشات، خلا‌زایی، صدا، نوسانات فشار، فرسایش و کاهش دبی است. از جمله مهمترین روش‌ها و تجهیزات کنترل‌کننده ضربه‌قوچ کنترل بستن شیر با برنامه زمان‌بندی، استفاده از شیرهای خیزاب‌شکن، افزودن اینرسی دورانی پمپ، استفاده از مخزن ضربه‌گیر و استفاده از مخزن هوا می‌باشد.

تاکنون روش‌های گوناگونی به منظور حل معادلات دیفرانسیلی حاکم بر جریان ناماندگار ارائه شده است. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش‌های ریاضی، ترسیمی، جبری، ضمنی، اختلال، تحلیل خطی، مشخصه‌ها، اجزاء محدود اشاره کرد. در روش مشخصه‌ها، معادلات دیفرانسیل جزئی پیوستگی و اندازه حرکت به دو معادله دیفرانسیل کلی تبدیل می‌شود، سپس، این معادلات به صورت اختلاف متناهی نوشته شده و با استفاده از رایانه حل می‌شوند. روش اجزاء محدود به عنوان ابزار قوی برای حل عددی مسائل مهندسی، محدوده وسیعی از تحلیل‌ها را دربر می‌گیرد. هرچند روش‌های تفاضل محدود و مشخصه‌ها دارای تئوری ساده‌تر و سابقه کاربرد طولانی‌تری هستند، اما از آنجا که روش اجزاء محدود مزایای قابل توجهی دارد مورد توجه مهندسين قرار گرفته است. از جمله مزایای این روش، می‌توان به عدم محدودیت در منظم بودن المان‌ها، امکان همگرایی، دقت قابل قبول و امکان دستیابی به نتایج در هر نقطه از دامنه مسئله اشاره کرد. جویک (۱۹۹۵) تلفیقی از روش مشخصه‌ها و اجزاء محدود را برای مدل کردن ضربه قوچ در یک سیستم ساده شامل مخزن و شیر به کار برد. او معتقد بود چون هر کدام از روش‌های مشخصه‌ها و اجزاء محدود دارای محدودیت‌هایی هستند، اگر همزمان با هم به کار برده شوند یکدیگر را تقویت کرده و محدودیت‌های قبلی را نخواهند داشت. ملاباشی (۱۳۸۰) به بررسی و ارزیابی روش اجزاء محدود در تحلیل پدیده ضربه قوچ پرداخت. وی این پدیده را در یک سیستم ساده، مخزن در بالادست در ابتدای لوله و شیر در انتهای لوله مدل کرد.

در این مطالعه، پدیده ضربه قوچ در سیستم با انواع شرایط مرزی اعم از مخازن ذخیره، شیرها، پمپ‌ها، تجهیزات (مخازن هوا و مخازن ضربه‌گیر)، انواع اتصالات لوله‌ها و تقاطع لوله‌ها در نظر گرفته می‌شود. انواع شرایط مرزی در شیرها شامل شیرهای قطع و وصل، شیرهای یکطرفه، شیرهای واقعی و یا شیری که طبق برنامه زمان‌بندی شده بسته می‌شود، است. کار مداوم پمپ و یا از کار افتادن پمپ، هر

کدام شرایط مرزی مختلفی خواهد داشت. در محل اتصال لوله‌های سری به علت تغییرات فیزیکی مسئله (تغییر قطر، تغییر شیب و یا تغییر جنس لوله) با در نظر گرفتن افت‌های موضعی و یا صرفنظر کردن از آنها در محل اتصال، شرط مرزی متفاوتی ایجاد می‌شود. در نهایت، نتایج به دست آمده از روش اجزاء محدود با نتایج حاصل از روش مشخصه‌ها مقایسه می‌شود.

۲- معادلات حاکم

برای تحلیل جریان ناماندگار در خطوط لوله، معادله دوم نیوتن برای طول کوچکی از لوله بسط داده می‌شود. با ساده سازی روابط معادله کلی اندازه حرکت در جریان ناماندگار به دست می‌آید که به معادله اولر معروف است.

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{dZ}{ds} - \frac{f}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} \quad (۱)$$

در بررسی پدیده ضربه قوچ دو نظریه رفتار صلب ستون آب و نظریه رفتار الاستیک وجود دارد. در نظریه رفتار صلب ستون آب فرض می‌شود که تغییرات به طور آنی در همه سیستم منتشر می‌شود. با توجه به اینکه این نظریه دارای فرضیات غیر واقعی است در طراحی‌ها به عنوان محاسبات اولیه می‌توان از معادله عمومی آن استفاده کرد. در نظریه الاستیک، تاثیر تغییر شکل لوله و تراکم‌پذیری سیال در نظر گرفته می‌شود و علاوه بر معادله اندازه حرکت از معادله پیوستگی نیز استفاده می‌شود. که در آن a سرعت انتشار امواج است.

$$a^2 \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0 \quad (۲)$$

۳- فرمول‌بندی معادلات حاکم به روش اجزاء محدود

برای حل معادلات پیوستگی و ممتوم مربوط به پدیده ضربه قوچ به روش اجزاء محدود مراحل زیر انجام می‌گیرد: نخستین مرحله در روش اجزاء محدود، گسسته‌سازی دامنه مسئله یا دامنه حل به المان‌های کوچکتر می‌باشد. برای هر المان یک جواب آزمایشی تقریبی در نظر گرفته می‌شود. این جواب تابعی از مقادیر مجهول در گره‌های دو سر المان است. برای تشکیل جواب آزمایشی از توابع شکل خطی استفاده شده است. سپس جوابهای آزمایشی در معادلات حاکم جایگزین می‌شود و مقادیر باقیمانده به دست می‌آید.

$$R_1 = \frac{a^2}{g} \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} + \hat{V} \frac{\partial \hat{H}}{\partial x} - \hat{V} \sin \alpha + \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \quad (۴)$$

$$R_2 = g \frac{\partial \hat{H}}{\partial x} + \frac{f}{2D} \hat{V} |\hat{V}| + \hat{V} \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial t} \quad (5)$$

جهت به تقریب رساندن مشتقات زمانی با استفاده از تکنیک تفاضل محدود استفاده می شود. پارامتر θ به عنوان تعیین کننده ضمنی یا صریح بودن حل در فاصله صفر تا یک تغییر می کند. اگر θ برابر صفر باشد روش صریح است و در روش ضمنی θ یک در نظر گرفته می شود. در نهایت مجموع انتگرال وزنی باقیمانده بر روی دو المان مجاور هر گره مساوی صفر قرار داده می شود.

$$C_i = \int_{e_{i-1}} W_2 R_1 dx + \int_{e_i} W_1 R_1 dx = 0 \quad ; \quad W_1 = N_1 \quad W_2 = N_2 \quad (6)$$

$$M_i = \int_{e_{i-1}} W_2 R_2 dx + \int_{e_i} W_1 R_2 dx = 0 \quad ; \quad W_1 = N_1 \quad W_2 = N_2 \quad (7)$$

در هر گره از دامنه، دو معادله C و M و دو مجهول (مقادیر سرعت V و هد فشار H) وجود دارد. در صورتیکه در دامنه مسئله N گره ($N-1$ المان) وجود داشته باشد، $2N$ معادله و $2N$ مجهول وجود دارد. برای حل این دستگاه معادلات از روش نیوتن-رافسون استفاده شده است.

۳-۱- فرمول بندی به روش پتروف گالرکین

در این روش توابع وزنی و توابع پایه ای با یکدیگر برابر نیستند و بسط ماتریسی توابع وزنی به صورت رابطه زیر تعریف می شوند که در آن $\mathcal{E}$ پارامتری است که تراز میرایی را مشخص می کند.

$$N_* = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \mathcal{E}g \frac{\partial N_1}{\partial x} & \mathcal{E}g \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \mathcal{E} \frac{a^2}{g} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \mathcal{E} \frac{a^2}{g} \frac{\partial N_2}{\partial x} & N_1 & N_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

۴- شرایط مرزی

۴-۱- شرط مرزی مخزن و شیر

مقدار هد در محل مخزن در تمام زمان ها معلوم و برابر با هد آب در مخزن است. همچنین سرعت در شیر واقع در انتهای خط لوله که طبق برنامه زمان بندی شده بسته می شود از رابطه زیر به دست می آید.

$$V(N, NPIPES) = V_0 \left(1 - \frac{t}{T_C}\right) \quad 0 \leq t \leq T_C \quad (9)$$

$$V(N, NPIPES) = 0 \quad t > T_C$$

۴-۲- شرط مرزی پمپ با سرعت ثابت و شرط از کار افتادن پمپ

معمولاً دو شکل برای معادله پمپ با سرعت ثابت بر حسب Q پیشنهاد می شود. شکل اول تابع درجه

دو h_p نسبت به Q است و شکل دومی خطی بودن h_p نسبت به Q .

در شرایط از کارافتادن پمپ، منحنی‌های مشخصه پمپ از قبیل منحنی‌های هد-دبی و گشتاور-دبی تغییر می‌کنند. ولی تغییرات h_p/n^2 و T/n^2 در برابر Q/n منحنی منحصر به فردی است.

$$\frac{h_p}{n^2} = \left[\frac{\left[\frac{h_p}{n^2} \right]_A - \left[\frac{h_p}{n^2} \right]_B}{\left[\frac{Q}{n} \right]_A - \left[\frac{Q}{n} \right]_B} \frac{Q}{nN_{Pa}} + \left[\frac{h_p}{n^2} \right]_B - \frac{\left[\frac{h_p}{n^2} \right]_A - \left[\frac{h_p}{n^2} \right]_B}{\left[\frac{Q}{n} \right]_A - \left[\frac{Q}{n} \right]_B} \left[\frac{Q}{n} \right]_B \right] \quad (10)$$

در هر لحظه از زمان، سرعت دورانی پمپ با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید و با نوشتن معادلات انرژی در محل پمپ هد و سرعت در آن محل به دست می‌آید.

$$n(t + \Delta t) = n(t) - \frac{60}{2\pi I} T(t) \Delta t \quad (11)$$

۴-۳- شرط مرزی لوله‌های سری

با فرض اینکه دو نقطه یکی در انتهای لوله اول و نقطه دیگر در ابتدای لوله دوم آنچنان به هم نزدیک باشند که هیچ‌گونه ذخیره جرمی بین آنها موجود نباشد، رابطه پیوستگی بر آنها حاکم است. همچنین، اگر فرض شود که افت هد در محل اتصال دو لوله ناچیز است، می‌توان رابطه انرژی را در آن محل نوشت.

۴-۴- شرط مرزی مخزن هوا

در این حالت علاوه بر معادلات پیوستگی و معادله پکپ در حالت از کار افتادن، معادله انرژی در محل مخزن هوا (۱۲)، معادله پیوستگی برای حجم هوای مخزن (۱۳) و معادله فرآیند ترمودینامیکی هوای مخزن (۱۴) نوشته می‌شود.

$$Q_C = C_0 A_n \sqrt{2g(H_T - H(1,1))} \quad (12)$$

$$C_T(t + \Delta t) = C_T(t) + \Delta t Q_C(t) \quad (13)$$

$$H_T = Z_P - H_{atm} + (H_{T_0} - Z_P + H_{atm}) \left(\frac{C_{T_0}}{C_T} \right)^\eta \quad (14)$$

۴-۵- شرط مرزی مخزن ضربه گیر یطرفه

فرض می‌شود که مخزن ضربه گیر در محل تقاطع دو لوله سری قرار دارد. بنابراین علاوه بر نوشتن معادله پیوستگی و معادله انرژی در محل تقاطع دو لوله سری، معادله انرژی (۱۵) و معادله پیوستگی (۱۶)

برای حجم مخزن نیز نوشته می شود.

$$Q_s = C_0 A_n \sqrt{2g(H_s + Z_{AB} - H_A)} \quad (15)$$

$$H_s(t + \Delta t) = H_s(t) - \frac{\Delta t}{A_s} Q_s(t) \quad (16)$$

۵- کاربرد مدل و بررسی نتایج

کاربرد روش اجزاء محدود در شرایط مرزی مختلف در ۸ مدل بررسی شده است. و نتایج حاصل از

این مدل‌ها با نتایج حاصل از روش مشخصه‌ها مقایسه شده است. این مدل‌ها عبارتند از:

مدل یک- پمپ با سرعت ثابت در بالادست و بستن شیر واقع در پایین دست

مدل دو- مخزن در بالادست و شیر واقعی قبل از مخزن در پایین دست

مدل سه- از کار افتادن پمپ واقع در بالادست خط لوله و مخزن در پایین دست برای لوله‌های سری

مدل چهار- از کار افتادن پمپ واقع در بالادست خط لوله با وجود مخزن هوا و مخزن در پایین دست لوله

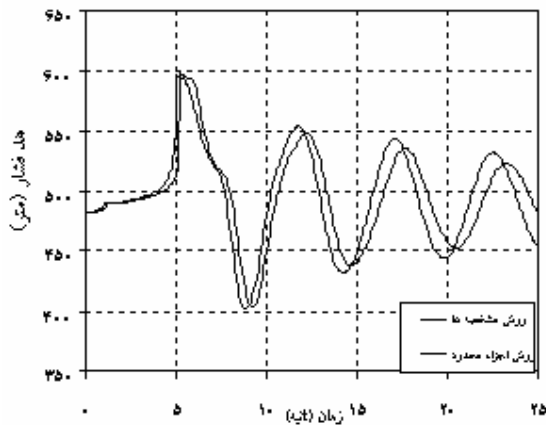
برای لوله‌های سری

مدل پنج- از کار افتادن پمپ واقع در بالادست خط لوله با وجود مخازن ضربه گیر یکطرفه و مخزن در

پایین دست برای لوله‌های سری

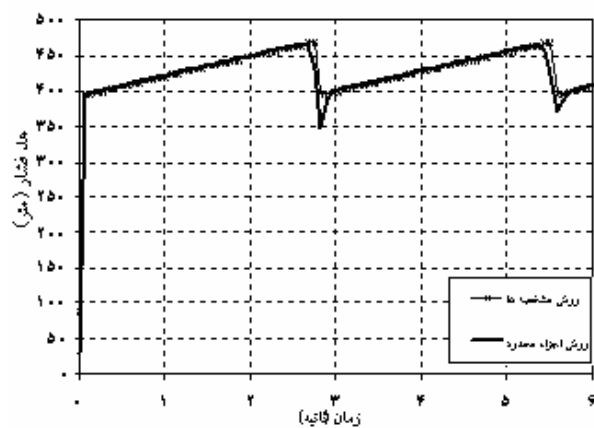
مدل شش- از کار افتادن پمپ واقع در بالادست خط لوله با وجود مخزن هوا و مخازن ضربه گیر و مخزن

در پایین دست لوله



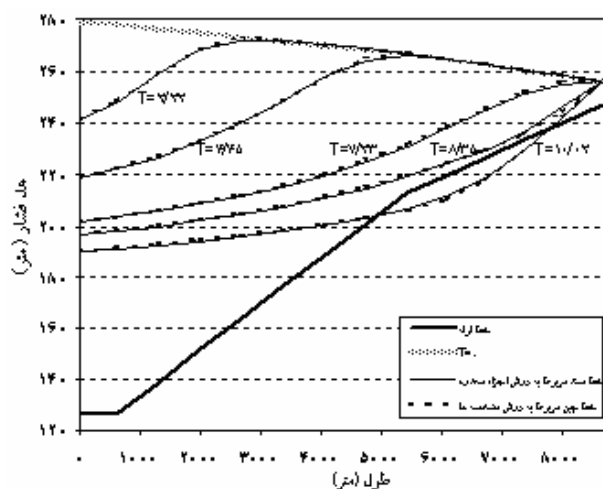
شکل ۲: مدل دو-مقایسه بین روش پتروف گالرکین و روش

مشخصه‌ها در محل شیر برای لوله‌های سری

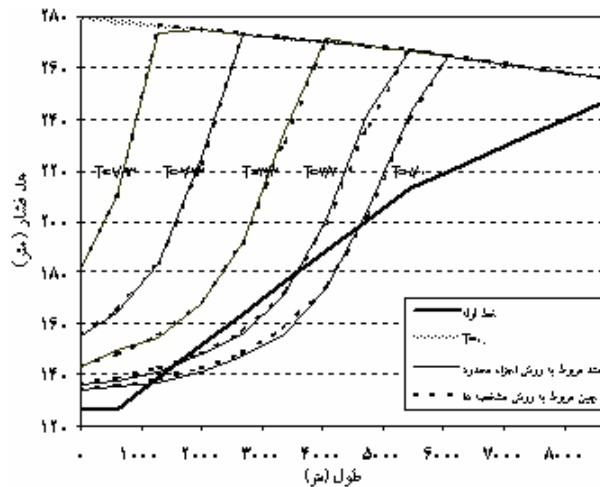


شکل ۱: مدل یک- مقایسه بین روش پتروف گالرکین و روش

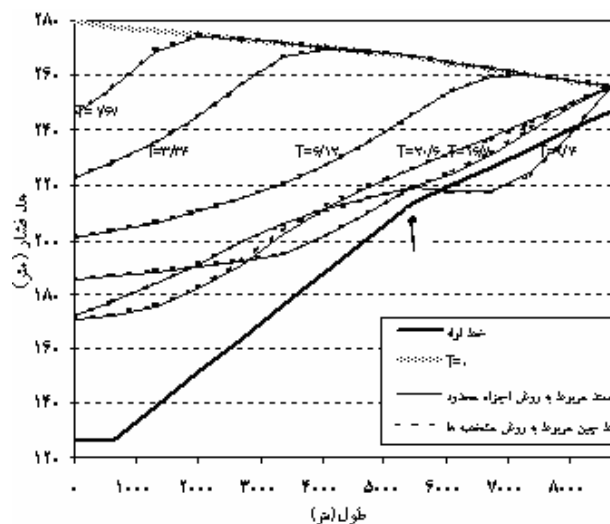
مشخصه‌ها در محل شیر (بسته شدن ناگهانی شیر)



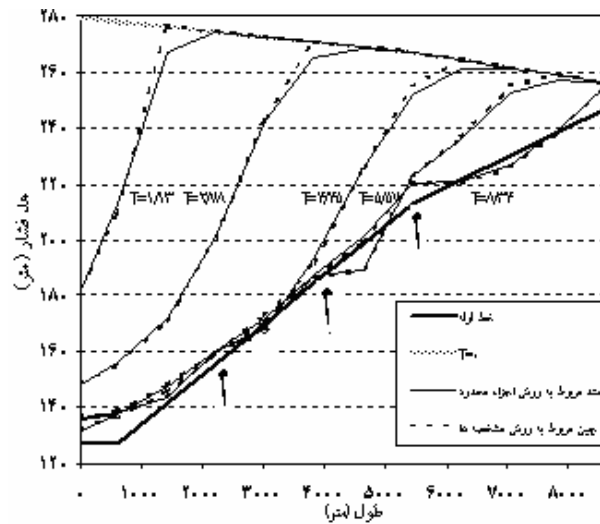
شکل ۴: مدل چهار- مقایسه بین پتروف گالرکین و مشخصه‌ها در حالت از کار افتادن پمپ و وجود مخزن هوا در لوله‌های سری



شکل ۳: مدل سه- مقایسه بین روش پتروف گالرکین و مشخصه‌ها در حالت از کار افتادن پمپ بدون وسیله جلوگیری از خیزاب



شکل ۶: مدل شش- مقایسه بین روش پتروف گالرکین و مشخصه‌ها در حالت از کار افتادن پمپ با وجود مخزن هوا و مخزن ضربه گیر



شکل ۵: مدل پنج- مقایسه بین روش پتروف گالرکین و مشخصه‌ها در حالت از کار افتادن پمپ با مخازن ضربه گیر

شکلهای ۱ تا ۶ نتایج حاصل از روش اجزاء محدود و مقایسه آن‌ها با روش مشخصه‌ها برای شش مدل فوق را نشان می‌دهد. همانطور که در شکل‌ها نشان داده می‌شود، نتایج حاصل از روش اجزای محدود تطابق بسیار خوبی با نتایج حاصل از روش مشخصه‌ها دارد.

۶- نتیجه گیری

استفاده از روش گالرکین استاندارد در حل بیشتر مدل‌ها به جواب‌های خوب و قابل قبولی در مقایسه با روش مشخصه‌ها می‌رسد. با توجه به نتایج به دست آمده در مقایسه دو روش گالرکین استاندارد و روش پتروف گالرکین استاندارد، روش پتروف گالرکین پیشنهاد می‌شود.

پارامتر θ (تعیین کننده صریح یا ضمنی بودن حل) در جواب‌های به دست آمده مؤثر خواهد بود. چنانچه این پارامتر به صفر نزدیک شود، همگرایی جواب‌ها از بین خواهد رفت و هرگاه به یک نزدیک شود، در مدل کردن تغییرات سریع هد به خوبی جواب نخواهد داشت. مقدار بهینه آن 0.5 به دست آمده است. پارامتر میرایی ε ، نیز در جواب‌های به دست آمده تأثیر کمی می‌گذارد. افزایش ε باعث بهبود جواب‌ها می‌شود. چنانچه تعداد المان‌ها زیاد شود، تغییر ε تأثیر زیادی در جواب‌ها نخواهد داشت. در مورد تأثیر مقدار گام زمانی می‌توان گفت، در گام‌های زمانی کمتر از گام زمانی به دست آمده از شرط کورانت ($Cr = a\Delta t/\Delta s$) جواب‌ها بسیار نزدیک به جواب‌های روش مشخصه‌ها می‌باشد. اما از آنجا که حافظه و زمان بیشتری به خود اختصاص می‌دهد، بهتر است از همان گام زمانی به دست آمده از شرط کورانت استفاده شود. اگر گام‌های زمانی بیشتر از گام زمانی به دست آمده از شرط کورانت انتخاب شود، جواب‌های حاصل به جواب‌های روش مشخصه‌ها نزدیک می‌باشد و از حجم عملیات محاسباتی می‌کاهد.

برای به دست آوردن حداکثر و حداقل فشارهای ایجاد شده در خطوط لوله با شرایط مرزی وجود پمپ با سرعت ثابت و بستن شیر، از کار افتادن پمپ با یا بدون وجود مخزن هوا و مخازن ضربه گیر، محاسبه حجم هوا برای طراحی مخزن هوا و طراحی مخازن ضربه گیر در لوله‌های سری می‌توان از جواب‌های روش پتروف گالرکین با دقت بسیار بالایی استفاده کرد. در همه موارد جواب‌های حاصل از این روش با نتایج حاصل از روش مشخصه‌ها مطابقت دارد.

مراجع

- [۱] تائبی، ا.، چمنی، م. ر.، شبکه‌های توزیع آب شهری، مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۷۹.
- [2] Larock, B. e., Jepposon, R. W., and Watters, G. Z., *Hydraulics of pipeline Systems*, CRC Press, New York, 2000.
- [3] Wylie, E. B., and Streeter, V. L., *Fluid Transients*, Feb Press, Ann Arbor, Michigan, 1985.
- [4] Jovic, V., "Finite element and the method of characteristics applied to water hammer modeling", *Int. J. for Engineering Modeling*, Vol. 8, No. 3&4, pp. 51-58, 1995.
- [۵] ملاباشی، آ.، "تحلیل پدیده ضربه قوچ به روش اجزاء محدود"، رساله کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۸۰.
- [6] Becker, E. B., and Carey, G. F., and Oden, J. T., *Finite Elements*, Vol. I, prentice- Hall Inc., 1981.