روندیابی سیل در رودخانه با استفاده از روش بدون شبکه SPH

حسن عباس‌نژاد[۱]، محمدرضا چمنی[۲]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

۲- دانشیار، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

h.abbassnejad@cv.iut.ac.ir

خلاصه

در این مقاله برای روندیابی سیل در رودخانه، معادلات کامل سنت-ونانت برای حالت یک‌بعدی جریان با استفاده از روش عددی SPH گسسته‌سازی شده است. سیلابی با آب‌نمای ورودی مشخص در ابتدای کانال درنظر گرفته شده و نتایج روندیابی سیل برای انتهای کانال با استفاده از این روش به‌دست آمده است. در انتها، نتایج این روندیابی با نتایج به‌دست آمده از روش‌های ماسکینگام-کونج و تفاضلات محدود مقایسه شده است. نتایج نمایانگر مطابقت خوب نتایج روش SPH با دو روش دیگر است.

کلمات کلیدی: بدون شبکه، SPH، روندیابی، سنت-ونانت

۱. مقدمه

سیل از زمان‌های بسیار دور خسارات زیادی را به زندگی انسان وارد می‌ساخته است. برای مقابله با خسارات ناشی از سیل ابتدا باید نسبت به شناخت چگونگی تشکیل سیلاب و تخمین آبنمای[1] سیل اقدام کرد. پس از آن، چگونگی انتقال و پخش سیلاب (روندیابی سیل) در رودخانه‌ها و مخازن سدها و دیگر سازه‌ها و موانع هیدرولیکی باید بررسی شود. تاکنون تلاش‌های مختلفی در زمینه‌ی روندیابی سیلاب در رودخانه صورت گرفته است. اولین حل کلاسیک برای روندیابی سیل در رودخانه در سال ۱۸۴۸ توسط سنت-ونانت[2] صورت گرفته است که به معادله‌ی پیوستگی و اندازه‌حرکت در حالت یک‌بعدی منجر شده است [1]. در بخش بعدی درباره این معادلات بیشتر بحث خواهدشد. یکی از پرکاربردترین روش‌های هیدرولوژیکی روش ماسکینگام[3] است که در سال ۱۹۳۸ توسط مک‌کارتی[4] پیشنهاد شده است، تا مهندسان ارتش بتوانند به مدیریت حوزه‌ی آبریز رودخانه ماسکینگام در اوهایو[5] بپردازند [1]. کالانین و میلیوکوف[6] (۱۹۵۸) روش جدیدی به نام روش مشخصه‌ها را پایه‌گذاری کردند و توانستند معادلات سنت-ونانت را بصورت عددی حل کنند. کونج[7] (۱۹۶۹) و میلر و کونج (۱۹۷۵) توانستند معادله‌ی موج کینماتیک[8] را با روش ماسکینگام ترکیب کرده و ضرایب موجود در روش ماسکینگام را بر اساس مشخصات هیدرولیکی رودخانه بیان کنند. پرمال[9] (۱۹۹۲) در ادامه‌ی کار کونج، معادله‌ی موج پخشیدگی[10] را

---

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران، گرایش مهندسی آب، دانشکده مهندسی عمران ، دانشگاه صنعتی اصفهان

[۲] هیأت علمی گروه مهندسی آب و محیط زیست، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان.

1 - Hydrograph
2 - Saint-Venant
3 - Maskingum
4 - McCarthy
5 - Ohio
6 - Kalinin and Milyukov
7 - Cunge
8 - Kinematic wave
9 - Perumal
10 - Diffusion wave

با روش ماسکینگام ترکیب کرده و ضرایب ماسکینگام به‌دست آمده توسط کونج را اصلاح کرد [1]. پرمال (۱۹۹۴) و پرمال و رانگا راجو (۱۹۹۹) شکل دیگری از معادله‌ی کلاسیک سنت-ونانت را استخراج کردند که در آن تعداد جملات موجود در معادله‌ی اندازه‌حرکت کاهش یافته است. یک روش ساده روندیابی کینماتیکی توسط مونتس [1] (۱۹۹۸) ارایه شده است. وانگ [2] (۲۰۰۳) شکل اصلاح شده‌ی معادله‌ی سنت-ونانت را ارایه داده است [1].

روش‌های بدون شبکه از نوین‌ترین روش‌های عددی در سال‌های اخیر است که توانستند پاره‌ای از معایب روش‌های مبتنی بر شبکه را اصلاح کرده و مسایلی را حل کنند که تحلیل آن‌ها با روش‌های مبتنی بر شبکه یا به‌طور کلی امکان‌پذیر نبوده و یا اینکه نیاز به صرف هزینه و زمان زیادی دارند. از جمله‌ی این مسایل می‌توان به تحلیل جریانات دارای سطح آزاد در حالت دو و سه بعدی و همچنین مسایل دارای مرزهای قابل تغییر اشاره کرد. روش عددی SPH یک روش بدون شبکه و مبتنی بر ذره است که اولین بار در سال ۱۹۷۷ توسط لوسی [3] و به موازات آن گینگولد و مناقان [4] برای شبیه‌سازی حرکت ستاره‌ها در کهکشان‌ها استفاده شده است [2و3و4]. دیدگاه مورد انتظار در این روش دیدگاه لاگرانژی است، اما در این تحقیق از دیدگاه اویلری برای حل عددی مساله استفاده شده است.

۲. معادلات حاکم

برای جریان ناپایدار رودخانه درحالت یک‌بعدی، رابطه‌های دیفرانسیلی پیوستگی و اندازه حرکت (معادلات سنت-ونانت) به‌صورت زیر است [۵، ۶]:

$$\frac{\partial y}{\partial t}+D_m\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial y}{\partial x}=0 \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial x}+g\frac{\partial y}{\partial x}-g(S_0-S_f)=0 \quad ; \quad S_f=\frac{n^2Q|Q|}{A^2R_h^{4/3}} \qquad (۲)$$

که در آن y عمق آب در کانال، V سرعت متوسط مقطع، D_m عمق هیدرولیکی، n ضریب زبری مانینگ، A سطح مقطع، R_h شعاع هیدرولیکی، S_0 شیب کف کانال، S_f شیب خط انرژی، g شتاب گرانش و x و t به‌ترتیب متغیرهای مستقل مکانی و زمانی است.

۳. روش ماسکینگام-کونج

کونج (۱۹۶۹) بر پایه‌ی معادله ماسکینگهام و با استفاده از معادله موج کینماتیک رابطه‌ی زیر را ارایه کرده است [۶، ۷]:

$$Q_{i+1}^{n+1}=C_1Q_i^{n+1}+C_2Q_i^n+C_3Q_{i+1}^n \qquad (۳)$$

که در آن زیرنویس i، شمارنده‌ی مقاطع است که به‌ترتیب از مقطع بالادست به پایین‌دست شماره‌گذاری شده‌اند و بالانویس n شمارنده‌ی گام زمانی است. ضرایب C_1، C_2 و C_3 (ضرایب ماسکینگام) نیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$C_1=\frac{K\chi+0.5\Delta t}{K-K\chi+0.5\Delta t} \quad ; \quad C_2=\frac{-K\chi+0.5\Delta t}{K-K\chi+0.5\Delta t} \quad ; \quad C_1=\frac{K-K\chi-0.5\Delta t}{K-K\chi+0.5\Delta t} \qquad (۴)$$

کونج مقادیر K و χ را با روابط زیر بیان کرده است:

$$K=\frac{\Delta x}{c_k} \quad ; \quad \chi=\frac{1}{2}\left(1-\frac{Q}{c_k\Delta xTS_0}\right) \quad ; \quad c_k=\frac{dQ}{dy} \qquad (۵)$$

که در آن Q دبی جریان، T عرض سطح آب و c_k سرعت موج کینماتیک است.

۴. روش تفاضلات محدود

در این تحقیق، معادلات کامل سنت-ونانت با نوعی از فرمولبندی صریح تفاضلات محدود مشهور به روش لاکس [5] گسسته‌سازی شده است. در این

---
1 - Montes
2 - Wang
3 - Lucy
4 - Gingold & Monaghan
5 - Lax

فرمول‌بندی، از تقریب مرتبه اول پیشرو برای گسسته‌سازی مشتق زمانی و از تقریب مرتبه اول مرکزی برای گسسته‌سازی مشتق مکانی استفاده شده است. برای خطی‌سازی معادلات در هر مرحله‌ی محاسباتی، ضرایب مشتقات به‌صورت ثابت درنظر گرفته شده که با استفاده از متوسط‌گیری مقادیر گره‌های مجاور در مرحله قبل به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند [۵، ۸]:

$$y_i^{n+1} = y_i^* - \frac{1}{2} r \left(D_m\right)_i^* \left(V_{i+1}^n - V_{i-1}^n\right) - \frac{1}{2} r V_i^* \left(y_{i+1}^n - y_{i-1}^n\right)$$
$$V_i^{n+1} = V_i^* - \frac{1}{2} r g \left(y_{i+1}^n - y_{i-1}^n\right) - \frac{1}{2} r V_i^* \left(V_{i+1}^n - V_{i-1}^n\right) + g \Delta t \left[S_0 - \left(S_f\right)_i^*\right] \quad (۶)$$

که در آن

$$r = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad ; \quad y_i^* = \frac{1}{2}\left(y_{i+1}^n + y_{i-1}^n\right) \quad ; \quad \left(D_m\right)_i^* = \frac{1}{2}\left[\left(D_m\right)_{i+1}^n + \left(D_m\right)_{i-1}^n\right]$$
$$V_i^* = \frac{1}{2}\left(V_{i+1}^n + V_{i-1}^n\right) \quad ; \quad \left(S_f\right)_i^* = \frac{1}{2}\left[\left(S_f\right)_{i+1}^n + \left(S_f\right)_{i-1}^n\right] \quad (۷)$$

در روابط بالا زیرنویس i شمارنده‌ی مقاطع است که به‌ترتیب از مقطع بالادست به پایین‌دست شماره‌گذاری شده‌اند و بالانویس n، شمارنده‌ی گام زمانی است.

۵. روش عددی SPH

گسسته‌سازی مشتق زمانی در این روش عددی که اصطلاحا به آن انتگرال‌گیری زمانی گفته می‌شود، همانند روش تفاضلات محدود است. در این تحقیق از همان تقریب مرتبه اول پیشرونسبت به زمان استفاده شده که منجر به فرم صریح معادلات شده است. در حالت یک‌بعدی، برای تقریب مقدار یک تابع در مکان و برای تقریب مقدار مشتق مکانی از رابطه‌های زیر استفاده می شود [2و9]:

$$\phi\left(x_i\right) \approx \int_{\Omega_i} \phi(x) W\left(x - x_i\right) dx \approx \sum_j^{N_i} \phi\left(x_j\right) W\left(x_j - x_i\right) \Delta x_j \quad (۸)$$

$$\frac{\partial \phi\left(x_i\right)}{\partial x} \approx -\int_{\Omega_i} \phi(x) \frac{\partial W\left(x - x_i\right)}{\partial x} dx \approx -\sum_j^{N_i} \phi\left(x_j\right) \frac{\partial W\left(x_j - x_i\right)}{\partial x} \Delta x_j \quad (۹)$$

اندیس‌های i و j بیانگر نقاط گسسته‌ی مکانی، $\phi(x_i)$ مقدار تابع در i امین نقطه از فضا، Ω_i دامنه‌ی تأثیر i امین نقطه، N_i تعداد نقاط قرارگرفته در دامنه‌ی تأثیر i امین نقطه و $W(x)$ تابع وزنی هموارساز است که به تابع کرنل معروف است. تاکنون توابع کرنل مختلفی در روش SPH و دیگر روش‌های بدون شبکه استفاده شده است. در تحقیق حاضر، از نوعی کرنل زنگوله‌ای شکل استفاده شده که اولین بار توسط لوسی (۱۹۷۷) به‌صورت زیر پیشنهاد شده است [2، 3] :

$$W\left(x - x_i\right) = \alpha_d \begin{cases} (1+3R)(1-R)^3 & R \le 1 \\ 0 & R > 1 \end{cases} \quad ; \quad R = \frac{\left|x - x_i\right|}{h} \quad (۱۰)$$

که در آن مقدار α_d برای مسایل یک‌بعدی برابر با $5/4h$ و h شعاع تأثیر تابع کرنل است. قابل توضیح است که مقدار h یک مقدار دلخواه بوده و مشخص کننده‌ی تعداد ذراتی است که با همدیگر اندر کنش دارند. همچنین، مقدار h دقت و پایداری مساله را تحت تأثیر قرار می‌دهد. اگر شماره‌گذاری مکانی (i و j) مقاطع مختلف به‌ترتیب از بالادست به پایین‌دست کانال فرض شود، معادلات کامل سنت-ونانت از دیدگاه اویلری را می‌توان به‌صورت زیر گسسته سازی کرد:

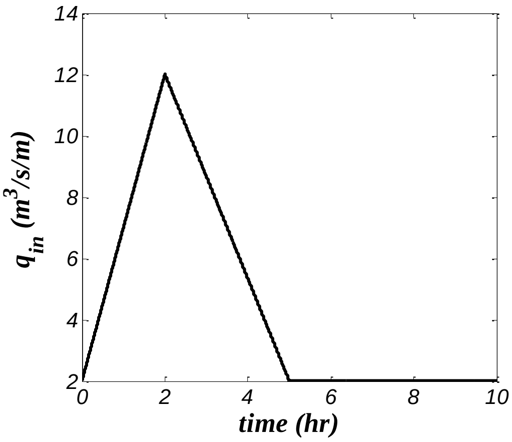
$$y_i^{n+1} = y_i^* - \Delta t \left[-\left(D_m\right)_i^* \sum_j^{N_i} V_j^n \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} \Delta x_j - V_i^* \sum_j^{N_i} y_j^n \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} \Delta x_j\right]$$
$$V_i^{n+1} = V_i^* - \Delta t \left[-V_i^* \sum_j^{N_i} V_j^n \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} \Delta x_j - g \sum_j^{N_i} y_j^n \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} \Delta x_j\right] + g \Delta t \left[S_0 - \left(S_f\right)_i^*\right] \quad (۱۱)$$

که در آن

$$y_i^* = \sum_j^{N_i} y_j{}^n W_{ij} \Delta x_j \quad ; \quad (D_m)_i^* = \sum_j^{N_i} (D_m)_j{}^n W_{ij} \Delta x_j \quad ; \quad V_i^* = \sum_j^{N_i} V_j{}^n W_{ij} \Delta x_j \quad ; \quad (S_f)_i^* = \sum_j^{N_i} (S_f)_j{}^n W_{ij} \Delta x_j \qquad (۱۲)$$

۶. روندیابی سیل

برای مدل‌سازی از کانال عریض مستطیلی به طول ۱۰ کیلومتر استفاده شده است. شیب کف کانال ۰/۰۰۱ و ضریب مانینگ برابر ۰/۰۵ است. در ابتدا جریانی یکنواخت و دایمی به عمق ۲ متر در کانال در جریان است. سپس سیلابی با آبنمای نشان داده شده در شکل ۱) در بالادست کانال به‌وقوع می‌پیوندد. همانگونه که در شکل (۱) نیز نمایان است، زمان پیک سیلاب در لحظه زمانی دو ساعت است.

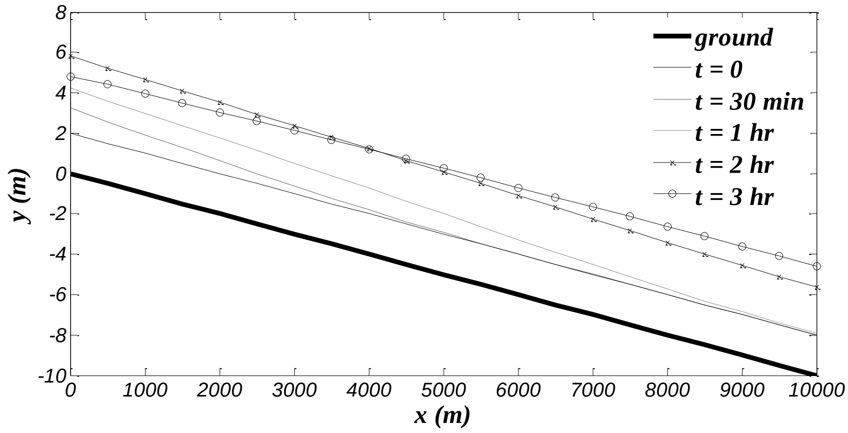


شکل ۱- آبنمای سیل در ابتدای کانال

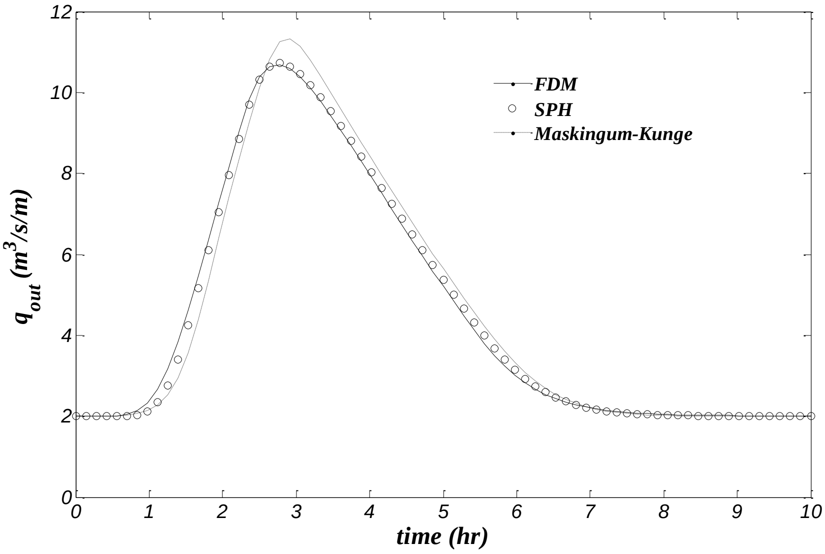
روندیابی سیل با استفاده از روش SPH و دو روش مذکور دیگر انجام شده است. برای این کار در محیط نرم‌افزار Matlab برنامه‌نویسی صورت گرفته است. طول کانال به صد بازه (صد ویک ذره در روش SPH و صد ویک گره در دو روش دیگر) تقسیم گردیده و محاسبات برای تمام گره‌ها (ذرات) با گام زمانی پنج ثانیه انجام گرفته است. شماره‌گذاری گره‌ها (ذرات) به‌صورت منظم از بالادست به پایین‌دست کانال صورت پذیرفته تا روابط ذکر شده در بخش‌های پیش کارامد باشند. شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست کانال در تمام گام‌های زمانی برابر عمق نرمال فرض گردیده تا نتایج روندیابی به روش ماسکینگام-کونج نزدیک‌تر شوند. یکی از محدودیت‌های روش ماسکینگام-کونج آن است که نمی‌توان شرایط مرزی غیر از عمق نرمال را مدل کرد، بلکه در آن فرض براین است که همواره و همه جا عمق کانال برابر عمق نرمال است.

نتایج روندیابی سیل با استفاده از روش SPH برای زمان‌های مختلف در طول کانال برای چند لحظه متفاوت زمانی در شکل ۲) نشان داده شده است. همان‌گونه که در شکل (۲) نمایان است، تا دو ساعت اول شروع سیل، عمق آب در قسمت‌های ابتدایی کانال در حال افزایش است و پس از آن فروکش می‌کند. در پایین دست کانال، تا زمان سه ساعت عمق آب همچنان در حال افزایش است. این به معنای انتقال پیک سیلاب به سمت پایین دست کانال است. در طبیعت نیز پیک سیلاب همواره به‌سمت پایین دست است. این تشابه منطقی بودن نتایج را تأیید می‌کند.

برای نشان دادن صحت روش عددی SPH، نتایج روندیابی برای آب‌نمای پایین‌دست کانال برای هر سه روش عددی ذکر شده در بخش‌های قبل در شکل ۳) نمایش داده شده است. نتایج دارای انطباق خوبی با یکدیگر می‌باشند. از مقایسه‌ی بین شکل ۱) و شکل ۳) می‌توان مشاهده کرد که پیک سیلاب در هر سه روش هم کاهش یافته و هم دچار تأخیر زمانی شده است و این نیز دلیل دیگری بر منطقی بودن نتایج است. بین روش‌های تفاضلات محدود و SPH همخوانی بیشتری نسبت به روش ماسکینگام-کونج وجود دارد. این اختلاف به‌دلیل فرضیات ساده‌کننده‌ی روش ماسکینگام-کونج در روندیابی است، زیرا که روش ماسکینگام-کونج، جریان را در تمام بازه‌های محاسباتی همواره به‌صورت یکنواخت درنظر می‌گیرد.



شکل ۲- تغییرات عمق در طول کانال در زمان‌های متفاوت با استفاده از روش SPH



شکل ۳-نتایج روندیابی سیل در انتهای کانال با استفاده از سه روش متفاوت

۷. نتیجه‌گیری

روش عددی SPH یک روش کارامد در حل معادلات دیفرانسیل مشتق جزیی است، که تاکنون توانسته مسایل مختلفی را با شرایط اولیه و مرزی پیچیده تحلیل کند. این روش جزو روش‌های بدون شبکه محسوب می‌شود که اساساً دارای دیدگاه لاگرانژی است. همانگونه که در این تحقیق مشاهده شد، این روش انعطاف داشته و قابلیت تحلیل مسایل با دیدگاه اویلری را نیز دارا است. تا کنون از روش SPH برای تحلیل روند سیل در رودخانه‌ها تحقیقی انجام نشده است و تحقیق حاضر برای اولین بار از این روش برای روندیابی سیلاب استفاده کرده است. کاربرد روش SPH در حل مسأله روندیابی سیل در حالت یک‌بعدی به نتایج خوبی منجر شده است. مورد انتظار است که این روش در حل مسایل دیگری مانند حرکت آبهای زیرزمینی در سفره‌های محصور و آزاد در حالت یک، دو و سه‌بعدی نیز نتایج خوبی را برجای گذارد.

۸. مراجع

1. Heatherman W.J. (2009), “*Flood routing on small streams: A review of muskingum-cunge, cascading reservoirs, and full dynamic solutions*”, Ph.D. Thesis, University of Kansas.

2. Liu G.R., Liu M.B. (2003), "*Smoothed particle hydrodynamics; a meshfree particle method*", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

3. Lucy L.B. (1977), "*Numerical approach to testing the fission hypothesis*", Astronomical Journal, 82, pp 1013-1024.

4. Gingold R.A., and Monaghan J.J. (1977), "*Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars*", Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 181, pp 375-389

۵. محمودیان شوشتری م.، (۱۳۸۷)، "*اصول جریان در مجاری باز*"، جلد دوم، انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز .

۶. حسینی، س. م.، ابریشمی ج.، (۱۳۸۵)، "*هیدرولیک کانال های باز*"، انتشارات دانشگاه امام رضا (ع).

۷. صفوی، ح. ر.، (۱۳۸۸)، "*هیدرولوژی مهندسی*"، انتشارات ارکان دانش.

۸. هادیان، م.ر.، زراتی ا.ر.، (۱۳۸۷)، "*مدل‌های عددی آب‌های کم‌عمق و کاربرد آن‌ها در مهندسی رودخانه و سواحل*"، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

9. Monaghan J.J., (2005), "*Smoothed particle hydrodynamics*", Institute of Physics Publishing, Rep. Prog. Phys. **68**, pp 1703–1759